Osnovni konstruktivni zadaci u radu

Uvod

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:
1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija

U analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu tog rješenja, logičkim razmišljanjem i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata slici, dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku.

U konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenja zadatkea.

U dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nisu dokazane.

U diskusiji (determinizaciji) razmatramo broj rješenja

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka polazimo od nekih zadataka koje ne svodimo na proste. To su:
1. konstruisati pravu koja prolazi kroz dvije date tačke.
2. konstruisati kružnicu kojoj su date centar i poluprečnik
3. konstruisati presječnu tačku dvije date prave
4. konstruisati presječnu tačku date prave i date kružnice
5. konstruisati presječnu tačku dvije date kružnice
6. konstruisati proizvoljnu pravu, proizvoljnu kružnicu, proizvoljnu tačku koja pripada ili ne pripada datoj pravoj ili datoj kružnici.

Prenošenje duži. Konstrukcija simetrale duži i simetrale ugla. Prenošenje uglova.

Urađeni zadaci

1. Na datoj pravoj a, sa date strane tačke A konstruisati tačku B, tako da duž AB bude jednaka datoj duži d.
2. Konstruisati duž jednaku zbiru dvije date duži d_1 i d_2.
3. Konstruisati duž koja je jednaka razlici dvije date duži d_1 i d_2 ($d_1 > d_2$).
4. U datoj tački date prave konstruisati normalu na tu pravu.
5. Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu.
6. Konstruisati pravu koja prolazi kroz sredinu date duži i okomita je na tu duž.
7. Konstruisati simetralu datog ugla.
8. Iz početka date poluprave u datoj ravni konstruisati polupravu koja sa datom polupravom zaklapa ugao jednak datom uglu.
9. Konstruisati ugao jednak zbiru dva data ugla.

Konstrukcije trouglova kod kojih su poznati SUS, USU, SSS, UUS i SSU

Urađeni zadaci

10. Konstruisati trougao kome su dvije stranice jednake dvijema datim dužima a ugao između njih jednak datom uglu.
11. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži a dva ugla nalegla na tu stranicu su jednaka dvoma datim uglovima.
12. Konstruisati trougao čije su tri stranice jednake trima datim dužima
13. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži, jedan ugao nalegao na tu stranicu jednak datom uglu i ugao nasprem te stranice jednak drugom datom uglu.
14. Konstruisati trougao kome su dvije date stranice jednake dvijema datim dužima, a ugao nasprem jedne od stranica jednak datom uglu.

Konstrukcija paralelnih pravih

Urađeni zadaci

15. Kroz datu tačku van date prave konstruisati pravu paralelnu toj pravoj.
16. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (koja se nalazi van date prave) i koja siječe datu pravu pod datim uglom.

Razni konstruktivni zadaci

Urađeni zadaci

17. Date su tačke A, B i C koje ne pripadaju istoj pravoj. Konstruisati međusobno paralelne prave a, b i c kroz tačke A, B i C redom tako da su rastojanja između susjednih pravih podudarna.
18. Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara hipotenuzi.
19. Na kraku x ugla $\measuredangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\measuredangle OAB = 3\measuredangle OBA$.
20. Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara datoj kateti.
21. Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara drugoj kateti.
22. Konstruisati kružnicu kroz tri date tačke.
23. Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

Problemi broj 1

Zadaci za vježbu

24. Konstruisati duž koja je jednaka razlici dvije date duži d_1 i d_2.

25. Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu. Zatim datu duž prenijeti na datu pravu tako da presjek date prave i konstruisane normale pripada sredini date duži.

26. Konstruisati ugao od $45°$.

27. Konstruisati ugao jednak razlici dva data ugla.

28. Ako su data dva ugla trougla konstruisati treći ugao tog trougla.

29. Dat je jedan oštar ugao pravouglog trougla. Konstruisati drugi oštar ugao tog trougla.

30. Konstruisati ugao pri vrhu jednakokrakog trougla ako je dat ugao na osnovici.

31. Konstruisati ugao na osnovici jednakokrakog trougla ako je dat ugao pri vrhu.

32. Konstruisati jednakokraki trougao ako su mu dati krak i ugao pri vrhu.

33. Konstruisati pravougli trougao ako su mu zadane katete.

34. Konstruisati jednakokraki trougao ako su dati njegova osnovica i ugao na osnovici.

35. Konstruisati pravougli trougao ako su dati njegova kateta i ugao nalegao na tu katetu.

36. Konstruisati jednakokraki trougao kome su dati osnovica i krak.

37. Konstruisati jednakostranični trougao ako mu je data jedna stranica.

38. Konstruisati uglove od $30°$, $60°$, $120°$ i $150°$.

39. Konstruisati pravougli trougao kome je data hipotenuza i jedan oštar ugao.

40. Konstruisati jednakokraki trougao kome je data osnovica i ugao pri vrhu.

42. Konstruisati jednakokraki trougao ako mu je dat krak i ugao na osnovici.

43. Konstruisati pravougli trougao ako su mu dati kateta i hipotenuza.

44. Konstruisati pravu koja se nalazi na datom rastojanju od date prave.

45. Kroz dvije date tačke M i N konstruisati dvije paralelne prave.

(Ova stranica je ostavljena prazna)

OSNOVNI KONSTRUKTIVNI ZADACI U RADU

Uvod

Svaki konstruktivni zadatak ima četri dijela:

1. Analiza
2. Konstrukcija
3. Dokaz
4. Diskusija

U Analizi pretpostavimo da je zadatak riješen, i na osnovu tog rješenja, logičkim razmišljanjem i po potrebi dodavanjem nekih novih elemenata slici, dolazimo do ideje šta možemo konstruisati od datih elemenata u zadatku.

U Konstrukciji pravimo niz od jasnih i nedvosmislenih koraka šta i kojim redom trebamo konstruisati da bismo od datih elemenata u zadatku došli do rješenja. Konstrukciju možemo tumačiti i kao Algoritam u kome su ulaz dati elementi zadatka a izlaz rješenje zadatka.

U Dokazu dokazujemo one tvrdnje na koje smo se pozvali u Analizi a koje nisu dokazane.

U Diskusiji razmatramo broj rješenja.

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka polazimo od nekih zadataka koje ne svodimo na proste. To su:

1. konstruisati pravu koja prolazi kroz dvije date tačke.
2. konstruisati kružnicu kojoj su dati centar i poluprečnik
3. konstruisati presječnu tačku dvije date prave
4. konstruisati presječnu tačku date prave i date kružnice
5. konstruisati presječnu tačku dvije date kružnice
6. konstruisati proizvoljnu pravu, proizvoljnu kružnicu, proizvoljnu tačku koja pripada ili ne pripada datoj pravoj ili datoj kružnici.

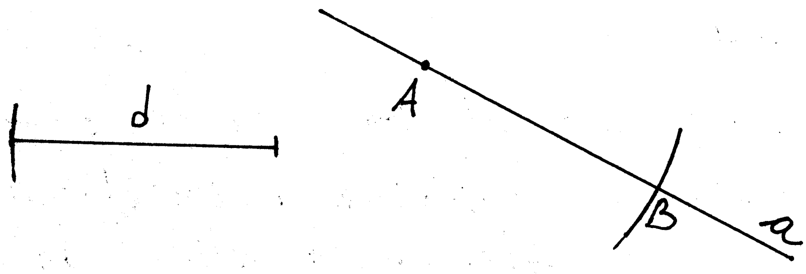
Prenošenje duži. Konstrukcija simetrale duži i simetrale ugla. Prenošenje uglova.

Zbog lakoće zadataka koji slijede preskočit ćemo neke od koraka (Analizu, Konstrukciju, Dokaz ili Diskusiju).

1. Na datoj pravoj a, sa date strane tačke A konstruisati tačku B, tako da duž AB bude jednaka datoj duži d.

Rj: Konstrukcija

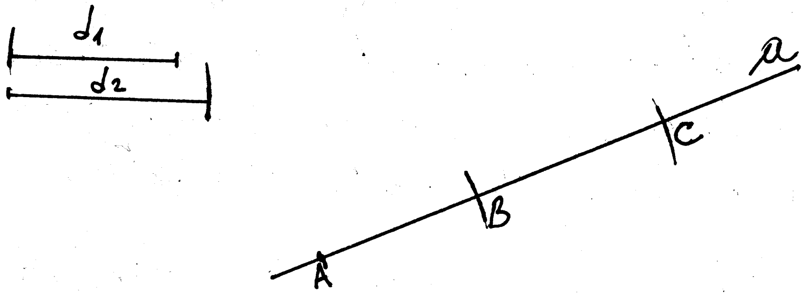
1. a, $A \in a$, d
2. $k(A, d) \cap a = \{B\}$
3. $AB = d$



2. Konstruisati duž jednaku zbiru dvije date duži d_1 i d_2.

Rj: Konstrukcija

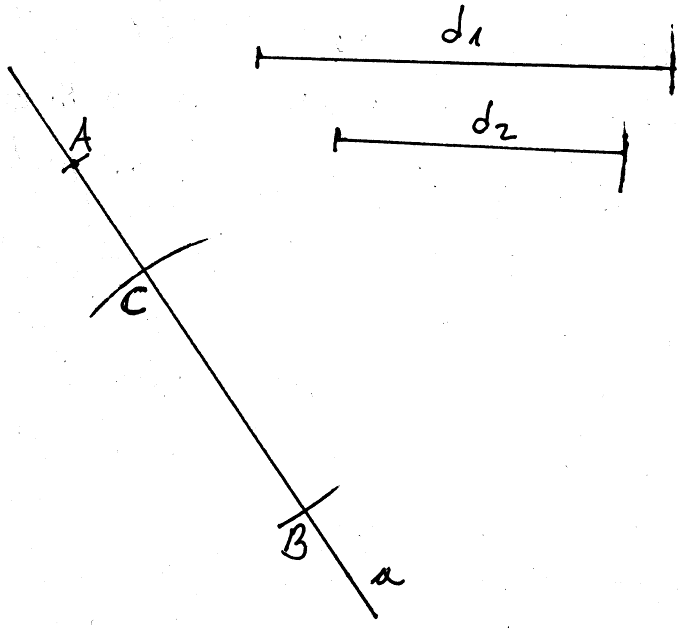
1. a, $A \in a$, d_1, d_2
2. $k(A, d_1) \cap a = \{B\}$
3. $k(B, d_2) \cap a = \{C\}$: $A-B-C$
4. $AC = d_1 + d_2$



3. Konstruisati duž koja je jednaka razlici dvije date duži d_1 i d_2 $(d_1 > d_2)$.

Rj: Konstrukcija

1. a, $A \in a$, d_1, d_2, $d_1 > d_2$
2. $k(A, d_1) \cap a = \{B\}$
3. $k(B, d_2) \cap a = \{C\}$: $A-C-B$
4. $AC = d_1 - d_2$

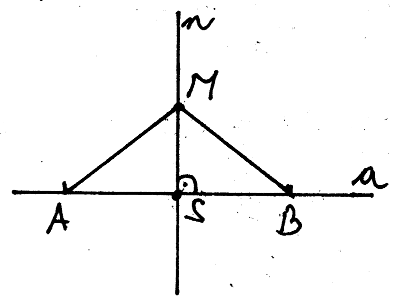


Prava s je simetrala duži AB ako ona sadrži središte S duži AB i normalna je na pravu $p(A,B)$.

4. U datoj tački date prave konstruisati normalu na tu pravu.

Rj: Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava



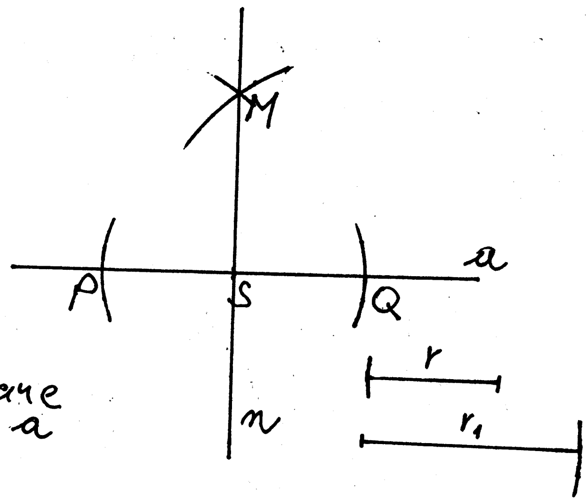
a, $S \in a$, $n \perp a$ i $n \cap a = \{S\}$.

Neka su A i B tačke na pravoj a takve da je $A - S - B$ i $AS \cong BS$.

Primjetimo da za proizvoljnu tačku M, $M \in n$ važi $AM \cong BM$ (zbog pravila SUS).

Tačku M možemo konstruisati, a poslije toga i pravu $n = p(M,S)$.

Konstrukcija



1. a, $S \in a$
2. dužinu r i r_1, $r_1 > r$
3. $k(S,r) \cap a = \{P,Q\}$: $P-S-Q$
4. $k(P,r_1) \cap k(Q,r_1) = \{M\}$ sa jedne strane prave a
5. $n = p(S,M)$

Dokaz

Koristićemo oznake iz konstrukcije.
Da prava n sadrži tačku S slijedi iz konstrukcije.
Trebamo dokazati da je $n \perp a$.

Prema konstrukciji $\left.\begin{array}{l} PS \cong QS \\ MS \cong MS \\ PM \cong QM \end{array}\right\} \xrightarrow{SSS} \triangle PSM \cong \triangle MSQ$

$$\Downarrow$$

$$\measuredangle PSM \cong \measuredangle MSQ \quad \dots (*)$$

Kako je $\measuredangle PSM + \measuredangle MSQ = 180°$ i $(*)$ $\Rightarrow$ $\measuredangle PSM = \measuredangle MSQ = 90°$.

tj. $p(M,S) \perp a \Rightarrow n \perp a$

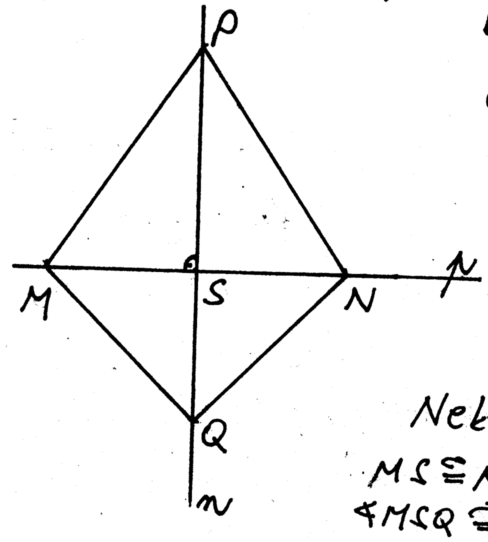
Diskusija

Vidjeli smo da zadatak ima bar jedno rješenje. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu pravoj u datoj tački.

(5.) Kroz datu tačku koja ne pripada datoj pravoj konstruisati normalu na datu pravu.

R: <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je n tražena prava, koja je $n \perp p$, i neka je $P \notin p$ data tačka. Označimo sa $\{S\} = p \cap n$. Naka su M i N tačke takve da je $MS = NS$. Primjetimo:



$$\left.\begin{array}{c} MS \cong NS \\ \sphericalangle MSP \cong \sphericalangle NSP = 90^\circ \\ PS \cong PS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle MSP \cong \triangle NSP \Rightarrow PM \cong NP$$

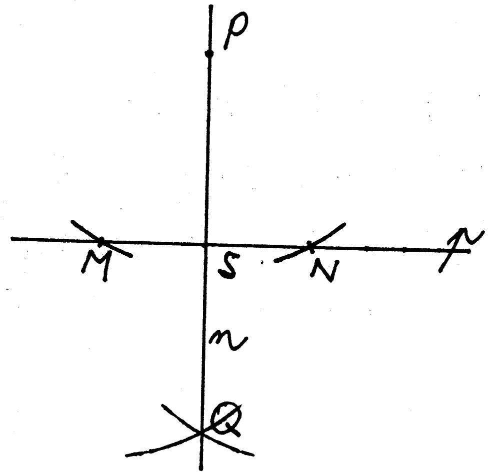
Neka je Q proizvoljna tačka, $Q \in n$.

$$\left.\begin{array}{c} MS \cong NS \\ \sphericalangle MSQ \cong \sphericalangle NSQ \\ QS \cong QS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle MSQ \cong \triangle NSQ \Rightarrow MQ \cong NQ$$

Kako je $MP \cong NP$ i $MQ \cong NQ$ to možemo konstruisati pravu $n = p(P,Q)$.

<u>Konstrukcija</u>

1. p, $P \notin p$,
2. r
3. $k(P,r) \cap p = \{M,N\}$
4. $k(M,r) \cap k(N,r) = \{P,Q\}$
5. $n = p(P,Q)$



<u>Dokaz</u>

Na osnovu konstrukcije imamo da je $P \in n$. Dokažimo da je $n \perp p$. $\{S\} = n \cap p$. Na osnovu konstrukcije:

$$\left.\begin{array}{c} PM \cong PN = r \\ MQ \cong NQ = r \\ PQ \cong PQ \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Longrightarrow} \triangle PMQ \cong \triangle PNQ \Rightarrow \sphericalangle MPQ \cong \sphericalangle NPQ$$

$$\left.\begin{array}{c} MP \cong NP \\ \sphericalangle MPS \cong \sphericalangle NPS \\ PS \cong PS \end{array}\right\} \overset{SUS}{\Longrightarrow} \triangle MPS \cong \triangle NPS \Rightarrow \sphericalangle MSP \cong \sphericalangle NSP \xRightarrow{\text{(kako je } \sphericalangle MSN = 180^\circ)} p \perp n$$

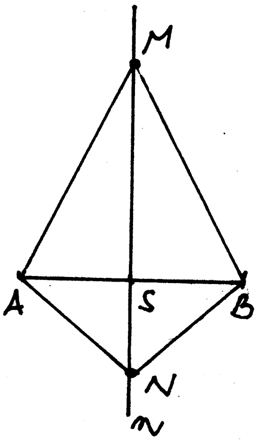
<u>Diskusija</u>

Vidjeli smo da zadatak ima bar jedno rješenje. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu pravu u datoj tački.

6. Konstruisati pravu koja prolazi kroz sredinu date duži i okomita je na tu duž.

Rj. <u>Analiza</u>

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je n tražena prava koja prolazi kroz sredinu S date duži AB. Neka je M proizvoljna tačka na pravoj n.



$$\left.\begin{array}{c} AS \cong BS \\ \measuredangle ASM \cong \measuredangle BSM = 90^\circ \\ MS \cong MS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ASM \cong \Delta BSM \Downarrow AM \cong BM$$

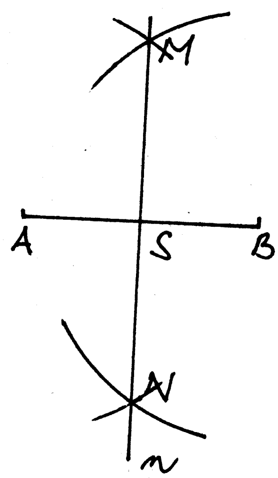
Neka je N proizvoljna tačka $N \in n$ i $M-S-N$

$$\left.\begin{array}{c} AS \cong BS \\ \measuredangle ASN \cong \measuredangle BSN = 90^\circ \\ NS \cong NS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta ASN \cong \Delta BSN \Downarrow AN \cong BN$$

Kako je $AN \cong BN$ i $AM \cong BM$ to možemo konstruisati pravu $n = p(M,N)$.

<u>Konstrukcija</u>

1. AB
2. r
3. $k(A,r) \cap k(B,r) = \{M,N\}$
4. $n = p(M,N)$



<u>Dokaz</u>

Dokažimo da je n okomita na duž AB i da prolazi kroz sredinu duži AB.

$$\left.\begin{array}{c} AM \cong BM \\ AN \cong BN \\ MN \cong MN \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \Delta AMN \cong \Delta BMN \Downarrow \measuredangle AMN \cong \measuredangle BMN$$

$$\{S\} = AB \cap n$$

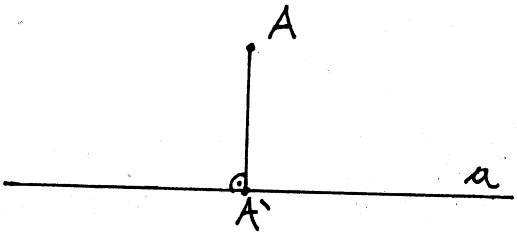
$$\left.\begin{array}{c} AM \cong BM \\ \measuredangle AMS \cong \measuredangle BMS \\ MS \cong MS \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \Delta AMS \cong \Delta BMS \Downarrow AS \cong BS \text{ i } \measuredangle ASM \cong \measuredangle BSM$$

Prava n prolazi kroz sredinu duži AB i kako je $\measuredangle ASM + \measuredangle BSM = 180^\circ$ to $\measuredangle ASM \cong \measuredangle BSM = 90$ pa $n \perp AB$.

<u>Diskusija</u>

Zadatak ima bar jedno rješenje. Jedinstvenost rješenja slijedi iz jedinstvenosti normale na datu duž.

Simetrala ugla je prava koja dijeli ugao na dva jednaka dijela.

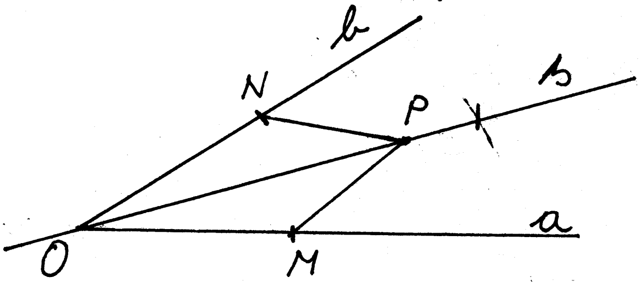


Ortogonalna projekcija tačke A na pravu a je tačka $A`$ takva da je $A` \in a$ i $p(A, A`) \perp a$.

⑦ Konstruisati simetralu datog ugla.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je prava s simetrala datog ugla $\measuredangle aOb$.



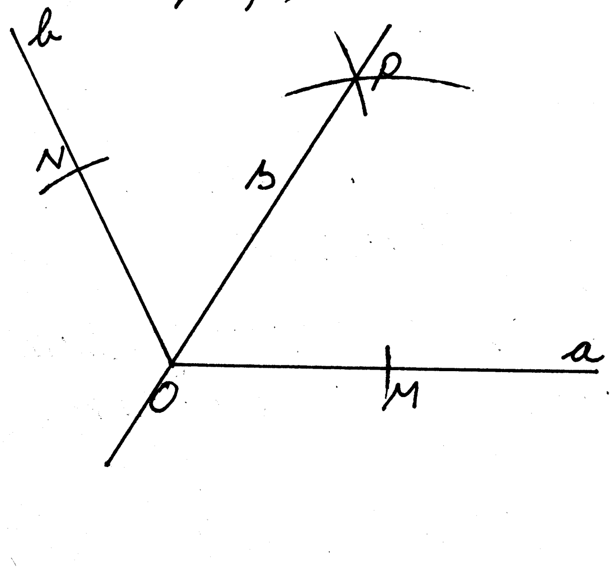
Neka su $M \in a$ i $N \in b$ proizvoljne tačke takve da je $MO \cong NO$ i neka je P proizvoljna tačka na simetrali s. Imamo:

$$\left.\begin{array}{l} OM \cong ON \\ \measuredangle MOP \cong \measuredangle NOP \\ OP \cong OP \end{array}\right\} \xRightarrow{SUS} \begin{array}{c} \triangle OMP \cong \triangle ONP \\ \Downarrow \\ MP \cong NP \end{array}$$

Kako je $OM \cong ON$ i $MP \cong NP$ to to simetralu $s = p(O, P)$ možemo konstruisati.

Konstrukcija

1. $\measuredangle aOb$
2. duž r
3. $k(O, r) \cap a = \{M\}$
4. $k(O, r) \cap b = \{N\}$
5. $k(M, r) \cap k(N, r) = \{P\}$
6. $s = p(O, P)$



Dokaz

Treba dokazati da je s simetrala ugla. Prema konstrukciji:

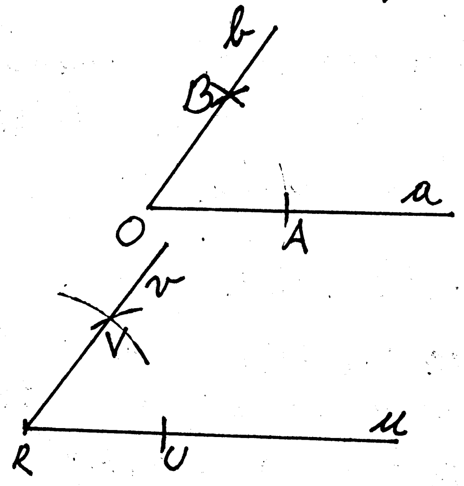
$$\left.\begin{array}{l} OM \cong ON \\ NP \cong MP \\ OP \cong OP \end{array}\right\} \xRightarrow{SSS} \begin{array}{c} \triangle OPN \cong \triangle OPM \\ \Downarrow \\ \measuredangle NOP \cong \measuredangle MOP \Rightarrow s \text{ simetrala } \measuredangle aOb \end{array}$$

Diskusija

Zadatak uvijek ima jedinstveno rješenje.

8. Iz početka date poluprave u datoj ravni konstruisati polupravu koja sa datom polupravom zaklapa ugao jednak datom uglu.

Rj. <u>Konstrukcija</u>

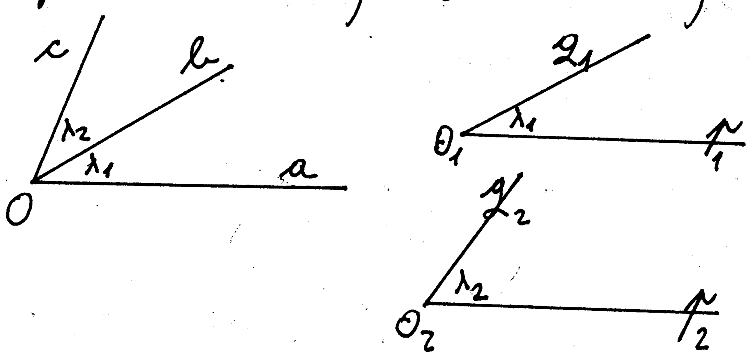


1. $\measuredangle aOb$, pp u sa početnom tačkom R
2. duž r
3. $k(O,r) \cap a = \{A\}$
4. $k(O,r) \cap b = \{B\}$
5. $k(R,r) \cap u = \{U\}$
6. $k(R,r) \cap k(U,AB) = \{V\}$
7. $v = pp[R,V)$

9. Konstruisati ugao jednak zbiru dva data ugla.

Rj. <u>Analiza</u>

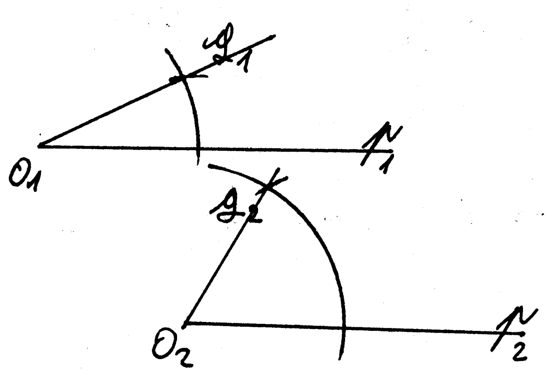
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je $\measuredangle aOc$ traženi ugao koji je jednak zbiru uglova $\measuredangle p_1O_1q_1$ i $\measuredangle p_2O_2q_2$. Neka je b poluprava takva da je $\measuredangle aOb = \measuredangle p_1O_1q_1$ i $\measuredangle bOc = \measuredangle p_2O_2q_2$.

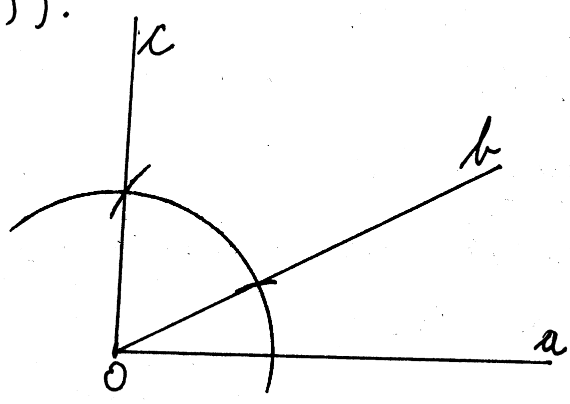


Sad, prema prethodnom zadatku, nije teško konstruisati $\measuredangle aOc$.

<u>Konstrukcija</u>

1. $\measuredangle p_1O_1q_1$, $\measuredangle p_2O_2q_2$, pp a sa početnom tačkom O
2. pp b: $\measuredangle aOb = \measuredangle p_1O_1q_1$
3. pp c: $\measuredangle bOc = \measuredangle p_2O_2q_2$ tako da c ne pripada poluravni sa ivicom u pravoj b koja sadrži a ($c \notin pr[p(b), a)$).



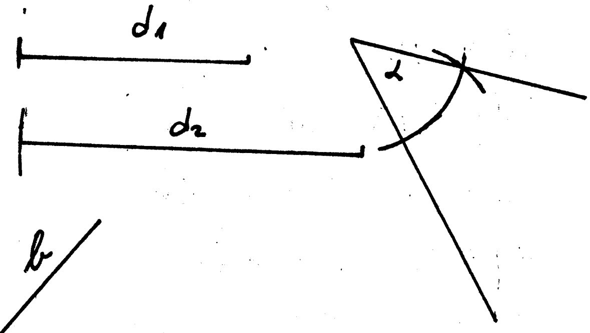


Konstrukcije trouglova kod kojih su poznati SUS, USU, SSS, UUS i SSU

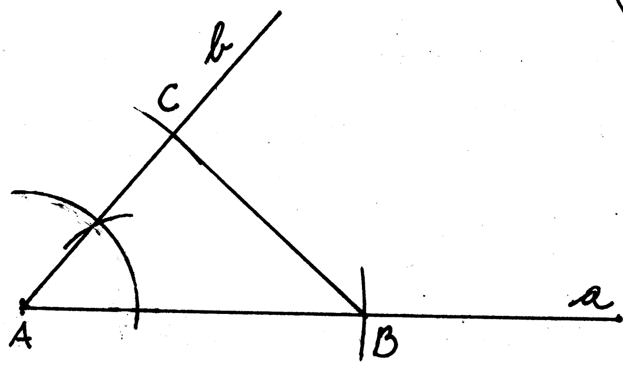
1. Konstruisati trougao kome su dvije stranice jednake dvjema datim dužima a ugao između njih jednak datom uglu.

Rj.

Konstrukcija



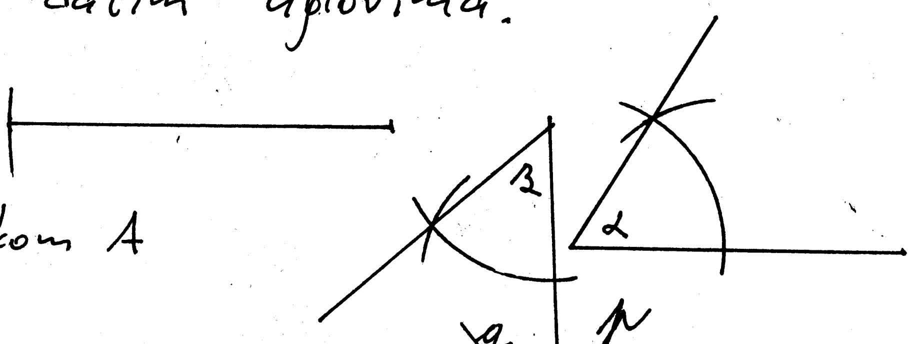
1. d_1, d_2, α
2. pp a sa početnom tačkom A
3. $k(A, d_2) \cap a = \{B\}$
4. pp b: $\measuredangle BAb = \alpha$
5. $k(A, d_1) \cap b = \{C\}$
6. $\triangle ABC$



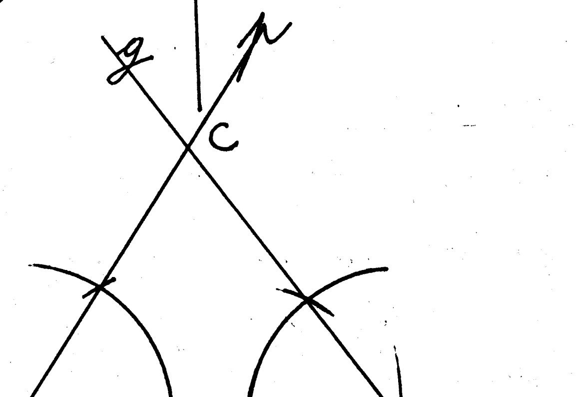
2. Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži a dva ugla nalegla na tu stranicu su jednaka dvoma datim uglovima.

Rj.

Konstrukcija



1. d, α, β
2. pp a sa početnom tačkom A
3. $k(A, d) \cap a = \{B\}$
4. pp p: $\measuredangle BAp = \alpha$
5. pp g: $\measuredangle ABg = \beta$
   i $g \in pr[a', p)$
   (a' je prava kga sadrži pp a)
6. $p \cap g = \{C\}$
7. $\triangle ABC$

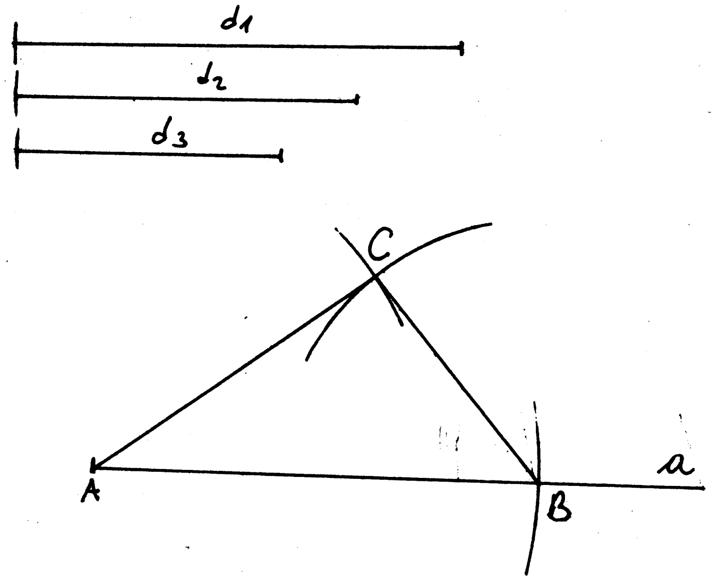


Diskusija

Zadatak ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\alpha + \beta < 180^\circ$.

(3.) Konstruisati trougao čije su tri stranice jednake trima datim dužima.

R.:



Konstrukcija

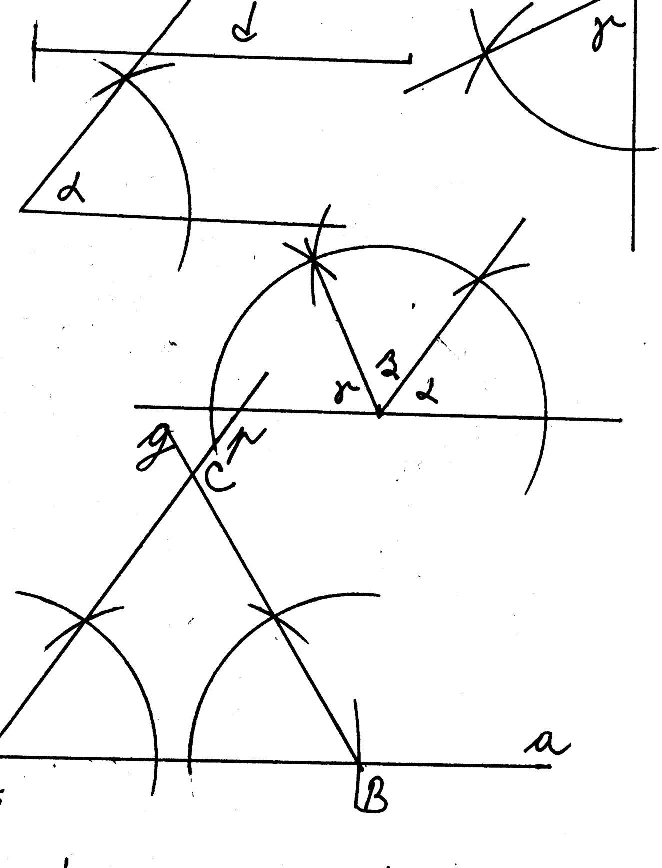
1. d_1, d_2, d_3
2. ppa sa početnom tačkom A
3. $k(A, d_1) \cap a = \{B\}$
4. $k(A, d_2) \cap k(B, d_3) = \{C\}$
5. $\triangle ABC$

Diskusija

Zadatak ima jedinstveno rješenje ako vrijedi $d_1 + d_2 > d_3$, $d_1 + d_3 > d_2$ i $d_2 + d_3 > d_1$.

(4.) Konstruisati trougao u kome je jedna stranica jednaka datoj duži, jedan ugao nalegao na tu stranicu jednak datom uglu i ugao nasprem te stranice jednak drugom datom uglu.

R.:



Konstrukcija

1. d, α, γ
2. $180°$, $\alpha+\gamma$, $\beta = 180° - (\alpha+\gamma)$
3. ppa sa početnom tačkom A
4. $k(A, d) \cap a = \{B\}$
5. ppp: $\measuredangle BAp = \alpha$
6. ppg: $\measuredangle ABg = \beta$
   i $g \in pr[a', p)$
   (a' je prava koja sadrži ppa)
7. $p \cap g = \{C\}$
8. $\triangle ABC$

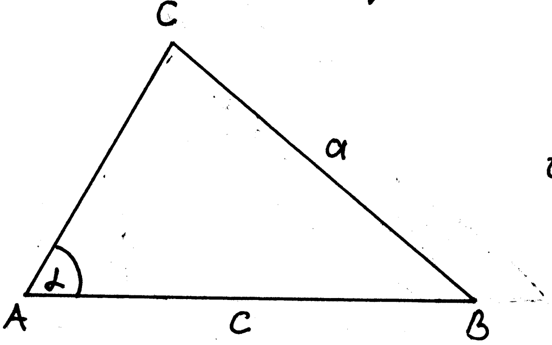
Diskusija

Zadatak ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\alpha + \gamma < 180°$.

5. Konstruisati trougao kome su dvije stranice jednake dvijema datim dužima, a ugao naspram jedne od stranica jednak datom uglu

Rj. **Analiza**

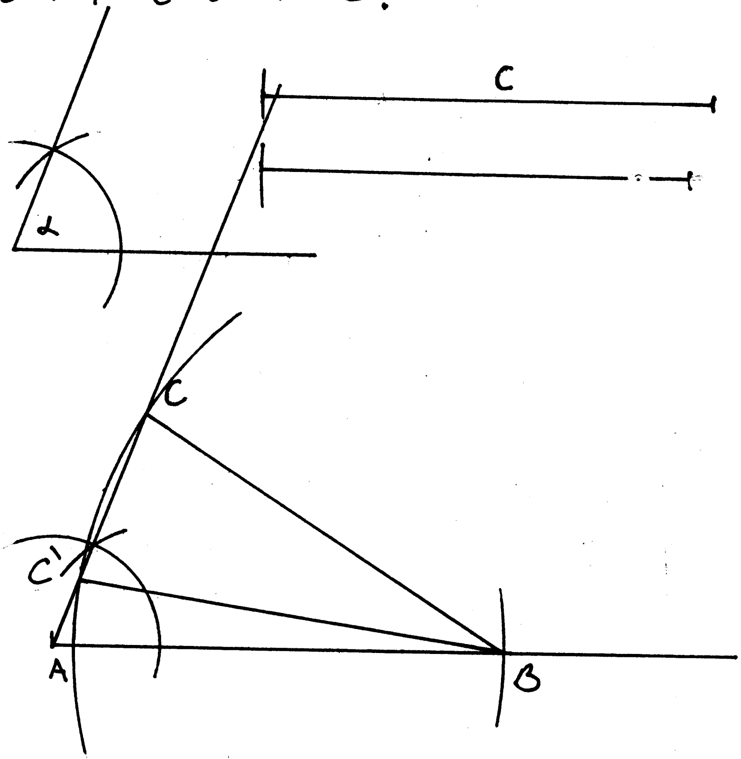
Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je dat ΔABC.



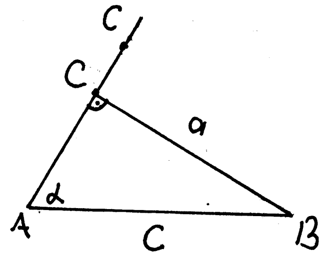
kod koga su $BC = a$, $AB = c$ i $\sphericalangle CAB = \alpha$. Kako su dati ugao α i stranica c to je $p(A,C)$ određena. Sad nije teško dobiti tačku C.

Konstrukcija

1. α, a, c
2. $pp\ a$ sa početnom tačkom A
3. $k(A, c) \cap a = \{B\}$
4. $pp\ q$: $\sphericalangle Aq = \alpha$
5. $k(B, a) \cap q = \{C, C'\}$
6. ΔABC, $\Delta ABC'$



Diskusija



$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$a = \sin\alpha \cdot c$

elementi	broj rješenja
$a > c$, α proizvoljno	1
$a = c$, $\alpha < 90°$	1
$a = c$, $\alpha \geq 90°$	0
$a < c$, $\alpha \geq 90°$	0
$a < c$, $\alpha < 90°$, $a < c \cdot \sin\alpha$	0
$a < c$, $\alpha < 90°$, $a = c \cdot \sin\alpha$	1
$a < c$, $\alpha < 90°$, $a > c \cdot \sin\alpha$	2

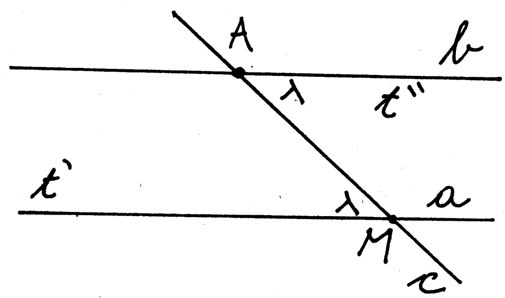
Ovaj zadatak služi kao primer da podudarnost dvije stranice i ugla u dva trougla nije dovoljan uvjet za podudarnost ta dva trougla. Oni će biti podudarni samo ukoliko je dat ugao naspram veće str.

Konstrukcija paralelnih pravih

(1.) Kroz datu tačku van date prave konstruisati pravu paralelnu toj pravoj.

Rj. Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je data prava a, tačka $A \notin a$ i neka je b tražena prava ($b \ni A$ i $b \parallel a$). Neka je c proizvoljna prava koja sadrži tačku A i siječe pravu a u tački M. Označimo sa t' polupravu

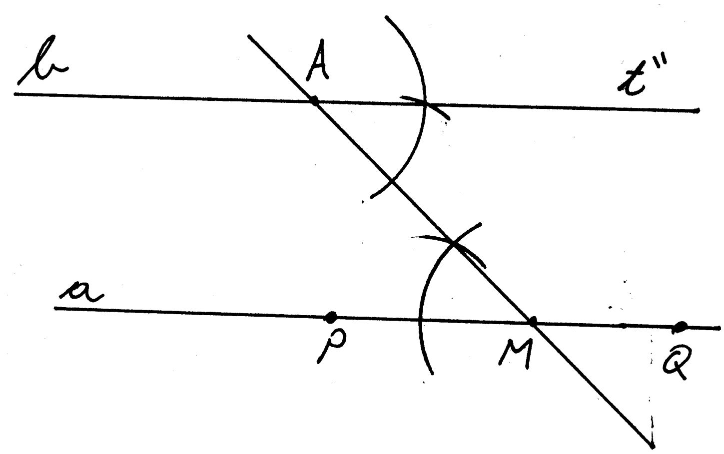


sa početnom tačkom M i $t' \subseteq a$ a sa t'' označimo polupravu sa početnom tačkom A takvu da $t'' \subseteq b$ i t', t'' se nalaze sa različite strane prave c.

Kako je $a \parallel b$ to $\measuredangle t'MA \cong \measuredangle MAt''$ pa pravu b na osnovu datih elemenata nije teško konstruisati.

Konstrukcija

1. a, $A \notin a$
2. proizvoljna prava c
   $c \ni A$ i $a \cap c = \{M\}$
3. $P \in a$, $Q \in A$, $P-M-Q$
4. pp t'' sa početnom tačkom A
   pp t'' i $p[M, P)$ se nalaze sa različite strane prave c
   i $\measuredangle PMA = \measuredangle MAt''$
5. b: $b \supseteq t''$



Dokaz

Na osnovu podudarnosti uglova na transferzali (iz konstrukcije) dobijamo da su prave a i b paralelne

Diskusija

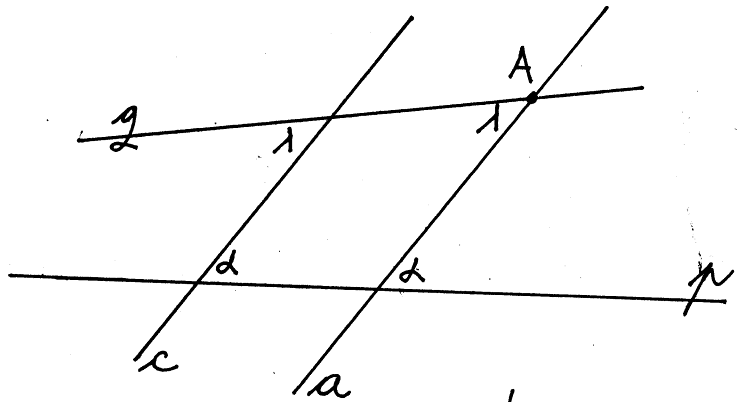
Jedinstvenost rješenja slijedi iz petog Euklidovog aksioma.

2. Konstruisati pravu koja prolazi kroz datu tačku (van date prave) i siječe datu pravu pod datim uglom.

Rj.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen. Neka je a tražena prava koja sadrži tačku $A \notin p$, i siječe pravu p pod uglom α.



Neka je c proizvoljna prava koja siječe pravu p pod uglom α. Primjetimo da je $a \parallel c$.

Ako sa q označimo proizvoljnu pravu koja siječe prave a i c i koja sadrži tačku A, dobićemo jednake uglove λ na transferzali, pa pravu a sad nije teško konstruisati.

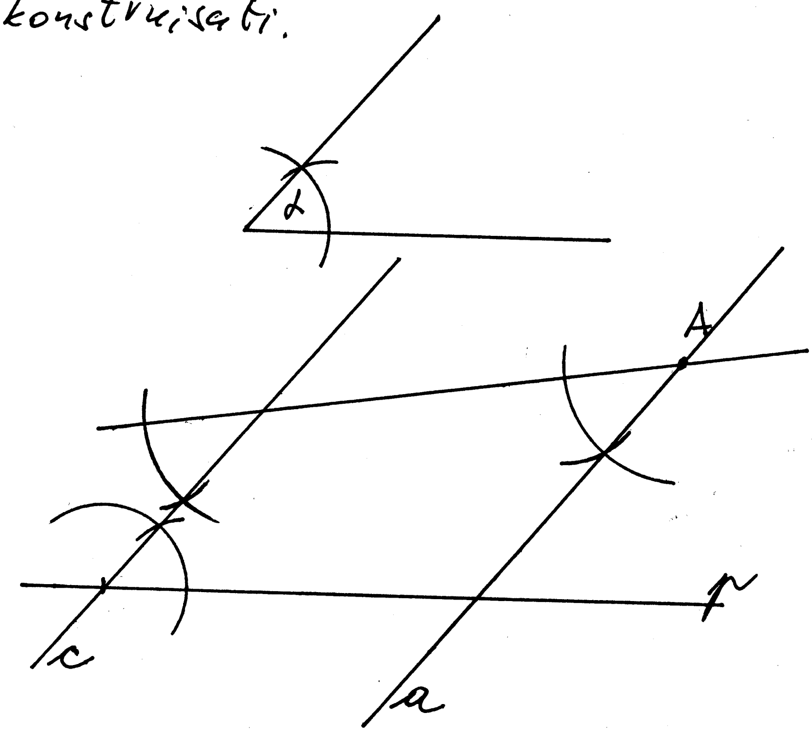
Konstrukcija

1. p, $A \notin p$, α

2. proizvoljnu pravu c takvu da siječe pravu p pod uglom α

3. proizvoljnu pravu q takvu da siječe prav[u c i] da sadrži tačku A.

4. pravu a: $A \in a$ i $a \parallel c$



Dokaz

Da dobijena prava prolazi kroz datu tačku i da siječe datu pravu pod datim uglom slijedi iz konstrukcije i osobina podudarnosti uglova na transferzali

Diskusija

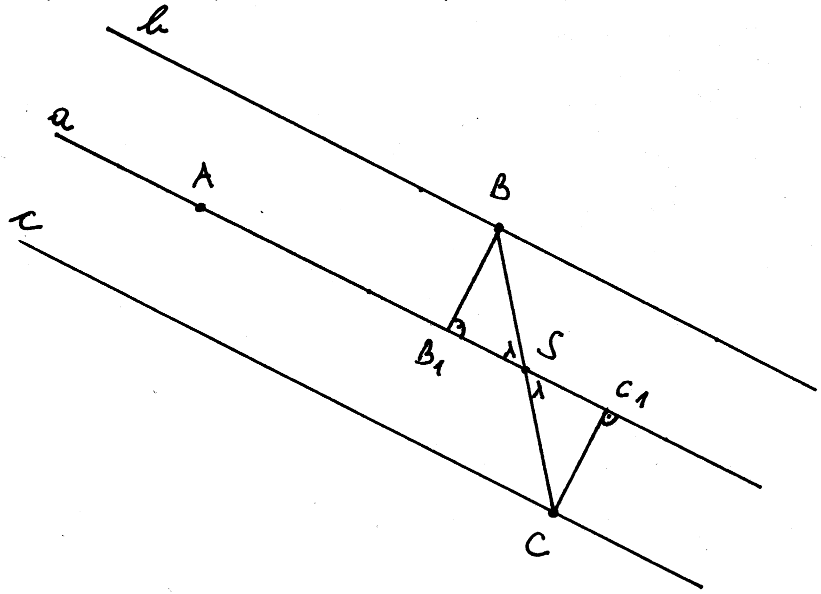
Jedinstvenost rješenja slijedi iz 5 Euklidovog aksioma.

Razni konstruktivni zadaci

(#) Date su tačke A, B i C koje ne pripadaju istoj pravoj. Konstruisati međusobno paralelne prave a, b i c kroz tačke A, B i C redom tako da su rastojanja između susjednih pravih podudarna.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su a, b i c tri međusobno paralelne prave koje sadrže redom tačke A, B i C i neka je rastojanje između susjednih pravih podudarna.

Označimo sa B_1 ortogonalnu projekciju tačke B na pravu a i sa C_1 ortogonalnu projekciju tačke C na pravu a. Neka je $\{S\} = a \cap BC$.

$$\left.\begin{array}{l} \measuredangle B_1SB \cong \measuredangle C_1SC = \lambda \ \text{(unakrsni)} \\ \measuredangle BB_1S \cong SC_1C = 90^\circ \\ BB_1 \cong CC_1 \end{array}\right\} \overset{UUS}{\Longrightarrow} \triangle BB_1S \cong \triangle CC_1S$$

$$\Downarrow$$

$$BS \cong CS$$

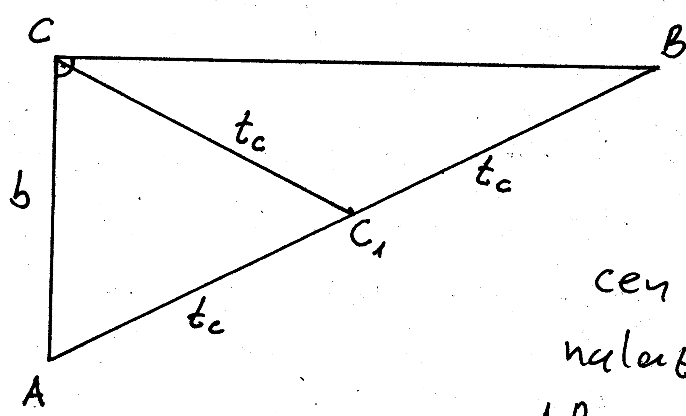
tj. S je sredina duži BC

Kako tačku S možemo konstruisati to možemo konstruisati i pravu a. Poslije ovoga nije teško konstruisati prave b i c.

Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara hipotenuzi.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



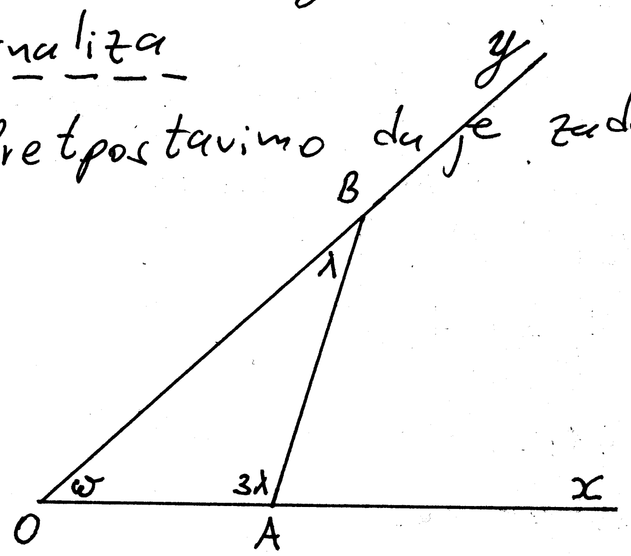
Neka je data kateta b i težišna linija t_c koja odgovara hipotenuzi AB. U pravouglom trouglu centar opisane kružnice se nalazi na sredini hipotenuze AB pa je $AC_1 \cong BC_1 = t_c$.
(dokazati ovu zadnju tvrdnju).

U trouglu ΔAC_1C su nam poznate sve tri stranice pa ga možemo konstruisati. Poslije ovoga nije teško dobiti tjeme B a time i ΔABC.

Na kraku x ugla $\sphericalangle xOy$ data je tačka A. Konstruisati na kraku y tačku B, tako da je $\sphericalangle OAB = 3\sphericalangle OBA$.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $\sphericalangle xOy = \omega$ dati ugao, i neka je

$\sphericalangle OAB = 3\lambda$, $\sphericalangle OBA = \lambda$

$(\sphericalangle OAB = 3\sphericalangle OBA)$.

$$\omega + 4\lambda = 180^\circ$$

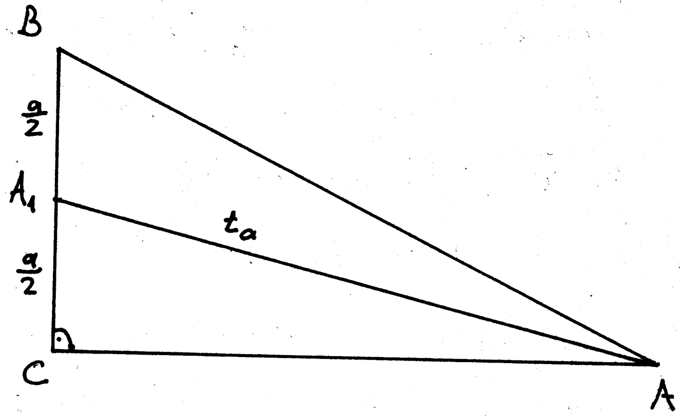
$$\lambda = 45^\circ - \frac{\omega}{4}$$

U trouglu ΔOAB nam je dato ugao ω, stranica OA i ugao 3λ pa prema pravilu USU ovaj trougao možemo konstruisati, a time i traženu tačku B.

Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara datoj kateti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $AA_1 = t_a$ težišna linija koja odgovara kateti BC. Tada je $A_1B \cong A_1C$.

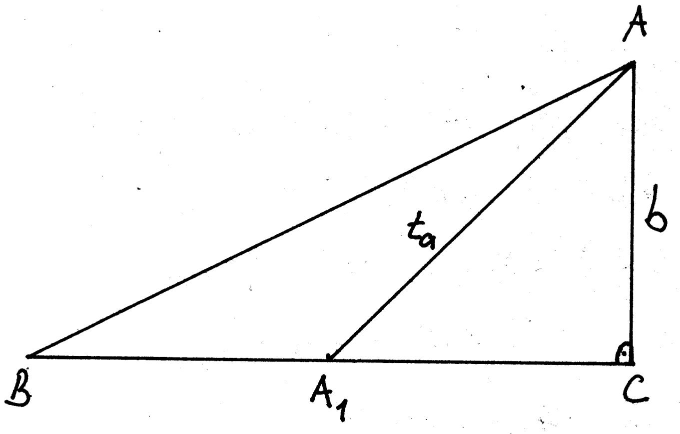
U ΔCAA_1 su nam poznate dvije stranice (t_a, $\frac{a}{2}$) i ugao ($\sphericalangle C = 90^\circ$) pa ga možemo konstruisati.

Poslije ovoga nije teško dobiti tačku B a time i ΔABC.

Konstruisati pravougli trougao ako su date jedna njegova kateta i težišna linija koja odgovara drugoj kateti.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



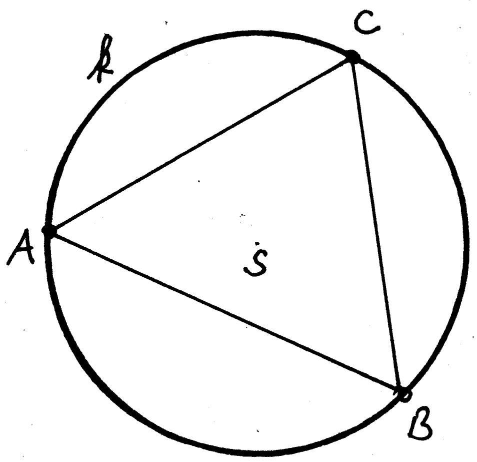
Neka je $AA_1 = t_a$ težišna linija koja odgovara kateti BC. Tada je $BA_1 \cong CA_1$.

U ΔAA_1C su nam date dvije stranice i ugao naspram veće stranice pa ga možemo konstruisati.
Sad nije teško dobiti i tjeme B a time i ΔABC.

(#) Konstruisati kružnica kroz tri date tačke.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka su date tačke A, B i C kroz koje prolazi kružnica $k(S,r)$. Spojimo tačke A i B, A i C i B i C.

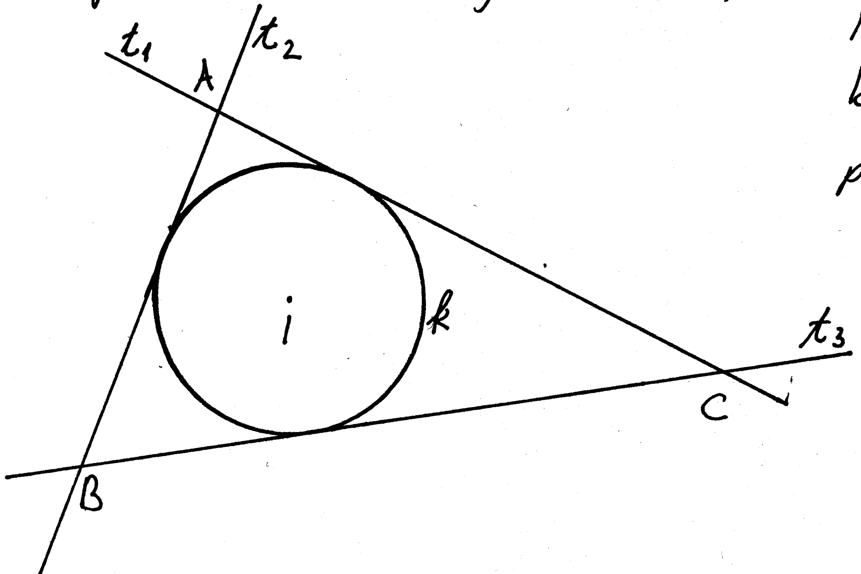
$k(S,r)$ je kružnica opisana oko trougla $\triangle ABC$ pa je nije teško konstruisati (S se nalazi na presjeku simetrala stranica).

Primjedba: Treba dokazati da je tačka dobijena presjekom simetrala stranica centar opisane kružnice $\triangle$.

(#) Konstruisati kružnicu koja dodiruje tri date prave.

Analiza

Pretpostavimo da je zadatak riješen.



Neka je $k(I,r)$ kružnica koja dodiruje tri date prave t_1, t_2 i t_3.

Neka je $t_1 \cap t_2 = \{A\}$, $t_2 \cap t_3 = \{B\}$ i $t_1 \cap t_3 = \{C\}$.

$k(I,r)$ je kružnica upisana u trougao $\triangle ABC$ pa je nije teško konstruisati (I se nalazi na presjeku simetrala uglova).

Primjedba: U dokazu ćemo pokazati da je I centar upisane kružnice trougla $\triangle ABC$.